

## Ασκήσεις στο κεφάλαιο 1 Διαφορικός Λογισμός

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 21$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{f(x)-4}{x+5}$ .
2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 13$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x)-3}{x+4}$ .
3. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = xe^x$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τη σχέση  $f''(x) - f(x) = 2e^x$ .
4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:  

(i)  $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 1)$

(ii)  $g(x) = e^x(x^2 - 7x + 11)$
5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sin x + \eta \mu x$ .  

(i) Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f''(x) = 0$ .

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, 1)$ .

(iii) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lambda f'(\frac{\pi}{2}) - 2f(\frac{\pi}{2}) = 2$ .
6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ .  

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(ii) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

(iii) Να βρεθεί η παράγωγος της  $f$ .

(iv) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης  $f$  που είναι παράλληλες στην ευθεία  $y = 2x + 5$ .
7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .  

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(ii) Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης  $f$ , όταν  $x = 3$ , ισούται με  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ .

(iii) Αν  $h(x) = \frac{f(x)-\sqrt{3}}{x-2}$  για  $x \neq 2$ , να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ .
8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ .  

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(ii) Να αποδείξετε ότι  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x$  από το πεδίο ορισμού της.

(iii) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1)f(x)]$ .

(iv) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0, f(0))$  με τον άξονα  $x'x$ .
9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$ .  

(i) Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(ii) Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$ .

- (iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0, f(0))$ .

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ .

- (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .  
(ii) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \ln x - \beta x^2$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .  
(ii) Να βρείτε την παράγωγο της  $f$  για κάθε  $x$  το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.  
(iii) Να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, 1)$  να είναι η  $y = 3x - 2$ .  
(iv) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 f'(x))$ .

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x(\alpha x^2 + \beta x + 9)$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Αν η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(2, e^2)$  είναι η  $y = -e^2 x + 3e^2$ , τότε:

- (i) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = -6$ .  
(ii) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

13. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$ .

- (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .  
(ii) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .  
(iii) Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = xe^x + 3$  όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = f(x) + e^x - 3$ .  
(ii) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$ .

15. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$  όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$ .  
(ii) Να αποδείξετε ότι  $e^x f'(x) = 2 - x$ .  
(iii) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

16. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 - 8$ , όπου  $\alpha$  ένας πραγματικός αριθμός.

- (i) Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$ , να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$ .  
(ii) Έστω  $\alpha = 1$ .  
(α') Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$ .  
(β') Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 2$ .

17. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$ , όπου  $\alpha$  πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει  $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Να δείξετε ότι  $\alpha = 9$ .  
(ii) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$ .

- (iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = -3x$ .

18. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$ .
- (ii) Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 0$ .
- (iii) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα  $x'x$ .

